1

(A)

(1)

円周に沿った向き

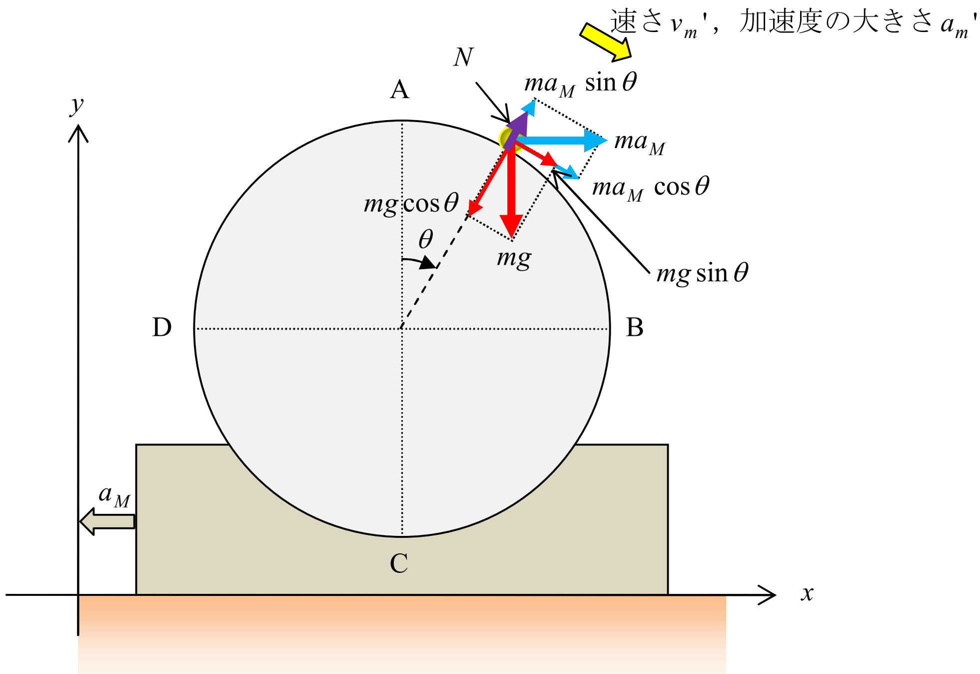
$ma_m' = mg\sin\theta + ma_M\cos\theta$

円周に垂直な向き

$$m\frac{{v_m'}^2}{r} = mg\cos\theta - ma_M\sin\theta - N$$

解説

台の大きさ a_M の加速度は台が物体から受ける垂直抗力の水平成分によるから，
その向きは x 軸負方向である。
よって，台から見ると物体は x 軸正方向に大きさ ma_M の慣性力を受ける。
また，a_m' を台から見た物体の円周に沿った向きの加速度とすると，
台から見た物体が受ける力は下図のようになる。



よって，

円周に沿った向きの運動方程式は，$ma_m' = mg\sin\theta + ma_M\cos\theta$

円周に垂直な向きの運動方程式は，物体の運動の中心方向の加速度 $=\dfrac{{v_m'}^2}{r}$ より，

$$m\frac{{v_m'}^2}{r} = mg\cos\theta - ma_M\sin\theta - N$$

(2)

(a) $M(-a_M) = -N\sin\theta$ **(b)** $0 = R - Mg - N\cos\theta$

解説

(a)

台は x 軸負方向に大きさ $N\sin\theta$ の力を受け，

大きさ a_M の加速度で x 軸負方向に運動する。

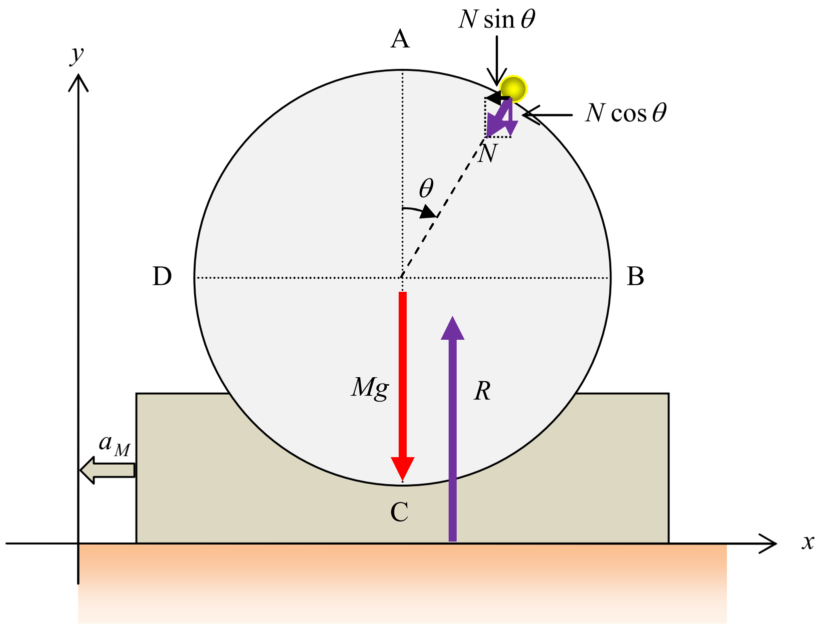
よって， $M(-a_M) = -N\sin\theta$

(b)

台は y 軸正方向に大きさ R の力， y 軸正方向に大きさ Mg と大きさ $N\cos\theta$ の力を受け，

加速度 0 で運動する。

よって， $0 = R - Mg - N\cos\theta$



(B)

(3)

$v_0' = \sqrt{gr\cos\theta_0}$

解説

物体が円板部からはなれるということは，

物体と円板部の作用反作用の関係が失われるということ，

すなわち垂直抗力が 0 になるということである。

台の x 軸方向の加速度の大きさを a_M' とすると，

(1) の $m\dfrac{v_m'^2}{r} = mg\cos\theta - ma_M\sin\theta - N$ と同様にして，

$m\dfrac{v_0'^2}{r} = mg\cos\theta_0 - ma_M'\sin\theta_0$ ・・・①

(2)の $M(-a_M) = -N\sin\theta$ と同様にして， $M(-a_M') = 0$ $\therefore a_M' = 0$ ・・・②

①，②より， $m\dfrac{v_0'^2}{r} = mg\cos\theta_0$ $\therefore v_0' = \sqrt{gr\cos\theta_0}$

(4)

(a) $v_0'\cos\theta_0 - V$ **(b)** $-v_0'\sin\theta_0$

解説

(a)

台から見た物体の速度の x 成分は $v_0'\cos\theta_0$，

台は床に対し速さ V で x 軸負方向に運動するから，その速度は $-V$

よって，物体の床に対する速度の x 成分を v_x' とすると， $v_0'\cos\theta_0 = v_x' - (-V)$

$\therefore v_x' = v_0'\cos\theta_0 - V$

(b)

台から見た物体の速度の y 成分は $-v_0'\sin\theta_0$，

床に対する台の速度の y 成分は 0

よって，物体の床に対する速度の y 成分を v_y' とすると， $-v_0'\sin\theta_0 = v_y' - 0$

$\therefore v_y' = -v_0'\sin\theta_0$

(5)

$0 = M(-V) + m(v_0'\cos\theta_0 - V)$

(6)

角度 θ_0 のときの物体の高さを重力の位置エネルギーの基準位置とすると，

$$mgr(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m\left\{(v_0'\cos\theta_0 - V)^2 + (-v_0'\sin\theta_0)^2\right\}$$

2

(A)

(1) $I_1 \Delta t$

(2) $\omega C V_0 \cos \omega t$

解説

時刻tにコンデンサーに蓄えられた電気量を$Q(t)$とすると，

$$\begin{aligned}\Delta Q &= Q(t+\Delta t) - Q(t) \\ &= CV_0 \sin\{\omega(t+\Delta t)\} - CV_0 \sin \omega t \\ &= CV_0 \sin \omega t \cos \omega \Delta t + \sin \omega \Delta t \cos \omega t - CV_0 \sin \omega t \\ &= CV_0 \sin \omega t + CV_0 \omega \Delta t \cos \omega t - CV_0 \sin \omega t \\ &= CV_0 \omega \Delta t \cos \omega t\end{aligned}$$

よって，$I_1 = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \omega C V_0 \cos \omega t$

別解

$\Delta t \to 0$のとき，$I_1 = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$はより厳密に成り立つことを利用する。

$$I_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt} = C\frac{d(V_0 \sin \omega t)}{dt} = \omega C V_0 \cos \omega t$$

(3) $L\dfrac{\Delta I_2}{\Delta t}$

解説

コイルに発生する誘導起電力をV_Lとすると，

$\Delta I > 0$のとき$V_L < 0$だから，$V_L = -L\dfrac{\Delta I_2}{\Delta t}$

また，キルヒホッフの第2法則（起電力の和＝電位降下の和）より，

$V + V_L = RI$であるが，抵抗値が$0[\Omega]$の場合を考えるとあるから$R = 0$

よって，$V + V_L = 0$

ゆえに，$V = -V_L = L\dfrac{\Delta I_2}{\Delta t}$

(4) $-\dfrac{V_0}{\omega L}\cos\omega t$

解説

時刻 t にコイルを流れる電流を $I(t)$ とすると，

$$\begin{aligned}\Delta I_2 &= I_{20}\sin\{\omega(t+\Delta t)+\alpha\} - I_{20}\sin(\omega t+\alpha)\\ &= I_{20}\sin\{\omega(t+\Delta t)\}\cos\alpha + I_{20}\sin\alpha\cos\{\omega(t+\Delta t)\} - I_{20}\sin(\omega t+\alpha)\\ &= I_{20}\{(\sin\omega t\cos\omega\Delta t+\sin\omega\Delta t\cos\omega t)\cos\alpha+\sin\alpha(\cos\omega t\cos\omega\Delta t-\sin\omega t\sin\omega\Delta t)\\ &\qquad -\sin\omega t\cos\alpha-\sin\alpha\cos\omega t\}\\ &= I_{20}\{(\sin\omega t+\omega\Delta t\cos\omega t)\cos\alpha+\sin\alpha(\cos\omega t-\omega\Delta t\sin\omega t)-\sin\omega t\cos\alpha-\sin\alpha\cos\omega t\}\\ &= I_{20}(\omega\Delta t\cos\omega t\cos\alpha-\omega\Delta t\sin\omega t\cos\alpha)\\ &= \omega I_{20}\Delta t\cos(\omega t+\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore V &= L\frac{\Delta I_2}{\Delta t}\\ &= L\omega I_{20}\cos(\omega t+\alpha)\\ &= L\omega I_{20}\sin\left(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

これと $V=V_0\sin\omega t$ より， $L\omega I_{20}\sin\left(\omega t+\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=V_0\sin\omega t$

これが任意の t について成り立つから，で成り立つから， $V_0=L\omega I_{20}$， $\alpha+\dfrac{\pi}{2}=0$

よって， $I_{20}=\dfrac{V_0}{\omega L}$， $\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}I_2 &= I_{20}\sin(\omega t+\alpha)\\ &= \frac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\frac{V_0}{\omega L}\cos\omega t\end{aligned}$$

別解 1

$\Delta t\to 0$ のとき， $V=L\dfrac{dI_2}{dt}$ より， $dI_2=\dfrac{V}{L}dt$

これと $V=V_0\sin\omega t$ より， $dI_2=\dfrac{V_0}{L}\sin\omega t dt$

よって， $\displaystyle\int dI_2=\int\frac{V_0}{L}\sin\omega t dt\quad \therefore I_2=-\frac{V_0}{\omega L}\cos\omega t+P$ （P は積分定数）

$I_2=I_{20}\sin(\omega t+\alpha)$ より， $I_{20}\sin(\omega t+\alpha)=-\dfrac{V_0}{\omega L}\cos\omega t+P$

これが任意のtについて成り立つから，$I_{20}=\dfrac{V_0}{\omega L}$，$\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$，$P=0$

よって，$I_2=-\dfrac{V_0}{\omega L}\cos\omega t$

別解 2

$\Delta t\to 0$ のとき，$V=L\dfrac{dI_2}{dt}$

これと $I_2=I_{20}\sin(\omega t+\alpha)$ より，

$$\begin{aligned}V&=L\frac{d(I_{20}\sin(\omega t+\alpha))}{dt}\\&=I_{20}\omega L\cos(\omega t+\alpha)\end{aligned}$$

これと $V=V_0\sin\omega t$ より，$V_0\sin\omega t=I_{20}\omega L\cos(\omega t+\alpha)$

これが任意のtについて成り立つから，$\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$，$V_0=I_{20}\omega L$

よって，

$$\begin{aligned}I_2&=I_{20}\sin(\omega t+\alpha)\\&=\frac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\\&=-\frac{V_0}{\omega L}\cos\omega t\end{aligned}$$

(5) $V_0\left(\omega C-\dfrac{1}{\omega L}\right)\cos\omega t$

解説

$$\begin{aligned}I&=I_1+I_2\\&=\omega CV_0\cos\omega t-\frac{V_0}{\omega L}\cos\omega t\\&=V_0\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)\cos\omega t\end{aligned}$$

(6) $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ **(7)** 0

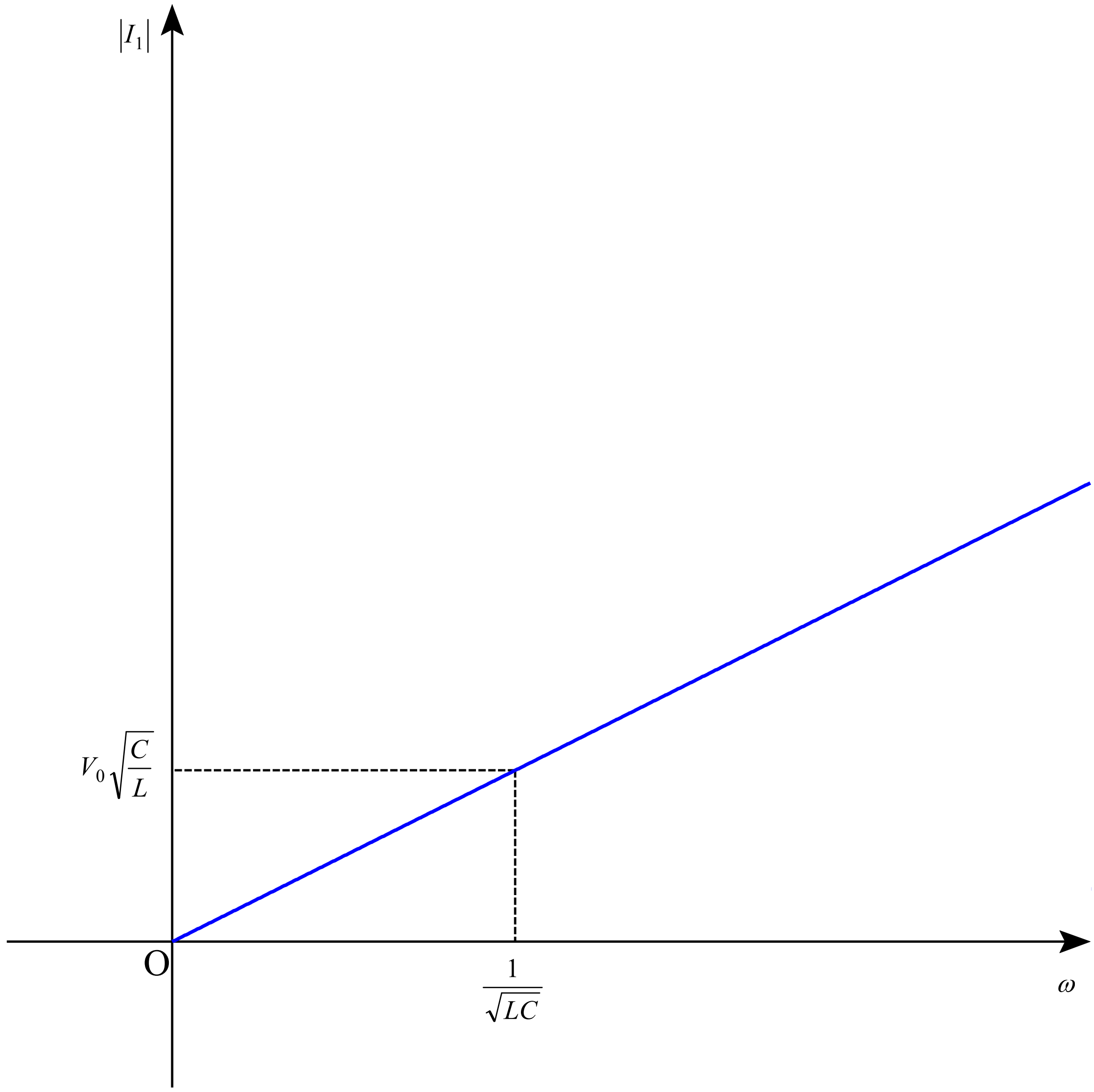
解説

$t=0$ のとき，$|I|=\left|V_0\left(\omega C-\dfrac{1}{\omega L}\right)\right|=\left|V_0\left(\dfrac{\omega^2CL-1}{\omega L}\right)\right|\geq 0$ より，

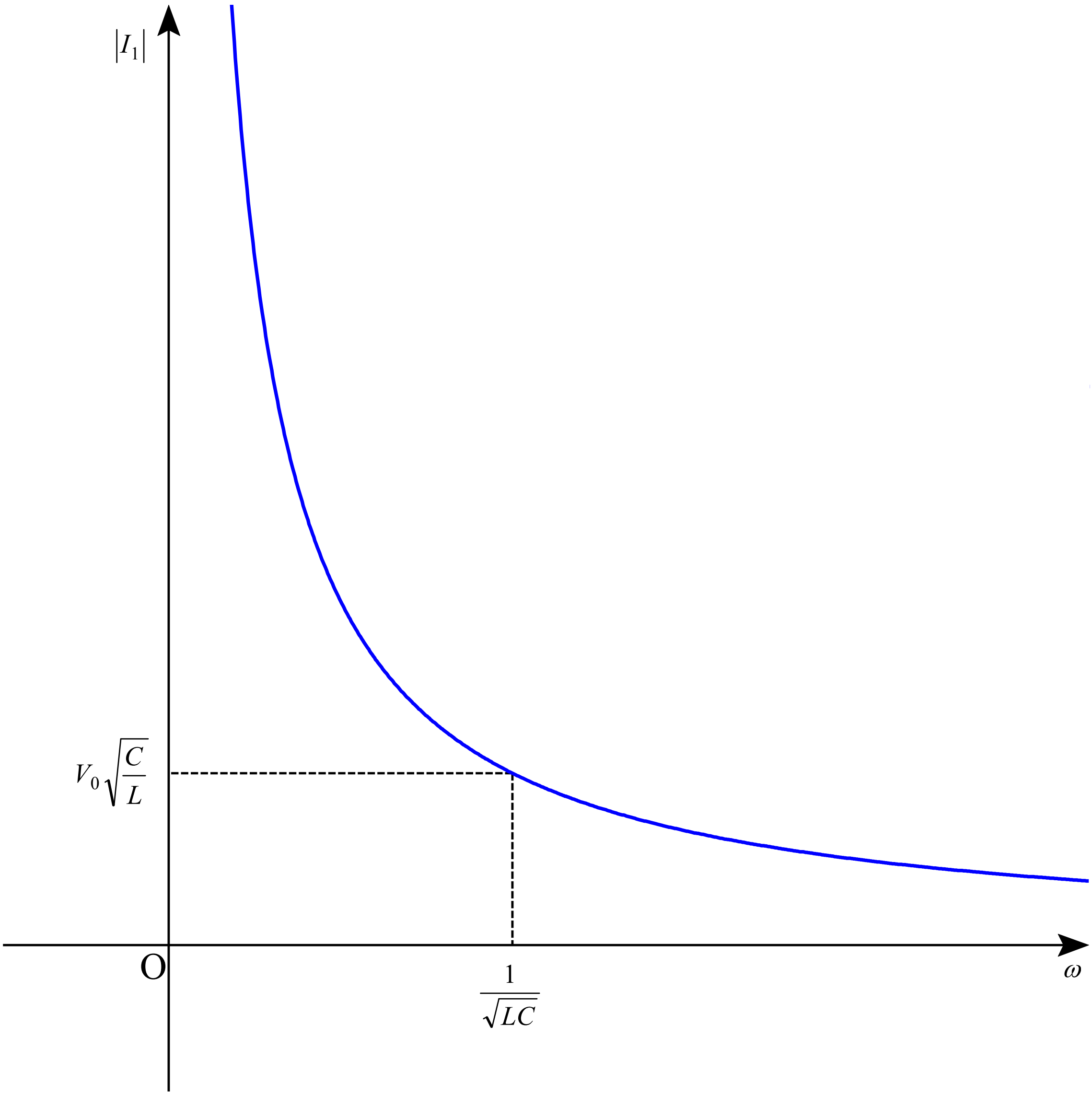
$\omega^2CL=1$ のとき，すなわち $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ のとき，$|I|$ は最小値 0 をとる。

(問)

(a)



(b)



(B)

(8) $RI_2 + L\dfrac{\Delta I_2}{\Delta t}$

解説

ΔI_2 は微小だから，抵抗を流れる電流を I_2 としてよい。

よって，(3)の解説より， $V + V_L = RI_2$

$$\therefore V = RI_2 - V_L$$
$$= RI_2 + L\frac{\Delta I_2}{\Delta t}$$

(9) $-\dfrac{\omega L}{R}$

解説

$$RI_2 = RI_{20}\sin(\omega t + \phi)$$

(4)と同様にして， $L\dfrac{\Delta I_2}{\Delta t} = \omega L I_{20}\cos(\omega t + \phi)$

よって，

$$V = RI_2 + L\frac{\Delta I_2}{\Delta t}$$
$$= RI_{20}\sin(\omega t + \phi) + \omega L I_{20}\cos(\omega t + \phi)$$
$$= I_{20}\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\sin(\omega t + \phi + \varphi)$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},\quad \sin\varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

これと $V = V_0\sin\omega t$ より， $V_0 = I_{20}\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ ， $\phi + \varphi = 0$

$$\therefore \tan\phi = \tan(-\varphi)$$
$$= -\tan\varphi$$
$$= -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$
$$= -\frac{\omega L}{R}$$

(10) $\dfrac{V_0}{R}\cos\phi$ あるいは $-\dfrac{V_0}{\omega L}\sin\phi$

解説

(9)の解説より， $V_0 = I_{20}\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$ $\therefore I_{20} = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$

また,

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \cos(-\varphi)\\ &= \cos\varphi\\ &= \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\end{aligned}$$

より,

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} = \frac{\cos\phi}{R}$$

よって， $I_{20} = \dfrac{V_0}{R}\cos\phi$

あるいは,

$$\begin{aligned}\sin\phi &= \sin(-\varphi)\\ &= -\sin\varphi\\ &= -\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\end{aligned}$$

より,

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} = -\frac{\sin\phi}{\omega L}$$

よって， $I_{20} = -\dfrac{V_0}{\omega L}\sin\phi$

3

(1) $\Delta U_{AB} = C_{\mathrm{v}}(T_B - T_0)$　$W_{AB} = -C_{\mathrm{v}}(T_B - T_0)$

解説

断熱変化の熱力学第一法則の式より，$0 = \Delta U_{AB} + W_{AB}$

(2) $\Delta U_{BC} = C_{\mathrm{v}}(T_1 - T_B) = -C_{\mathrm{v}}(T_B - T_1)$

(3) $Q_{CC'} = -K_1$　$W_{CC'} = -RT_1$

解説

状態C'の体積は十分小さいから 0 と見なしてよい。

また，状態Cの体積をV_Cとすると，$W_{CC'} = p_1(0 - V_C) = -p_1V_C = -RT_1$

(4) $Q_{C'D'} = -C_0(T_1 - T_2)$　$W_{C'D'} = 0$

(5) $Q_{D'D} = K_2$　$W_{D'D} = RT_2$

解説

(3)と同様にして，$W_{D'D} = p_0(V_D - 0) = p_0V_D = RT_2$

(6) $\Delta U_{DA} = C_{\mathrm{v}}(T_0 - T_2)$

(7) $C_{\mathrm{v}}(T_1 - T_2)$

解説

$$\begin{aligned}\Delta U_{DA} + \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} &= (U_A - U_D) + (U_B - U_A) + (U_C - U_B)\\ &= U_C - U_D\\ &= U_{DC}\\ &= C_{\mathrm{v}}(T_1 - T_2)\end{aligned}$$

(8) $\dfrac{Q}{-W_{AB}} = \dfrac{-C_0(T_1 - T_2) + K_2 + (C_{\mathrm{v}} + R)(T_0 - T_2)}{C_{\mathrm{v}}(T_B - T_0)}$

解説

$$\begin{aligned}Q &= Q_{C'D'} + Q_{D'D} + Q_{DA}\\ &= -C_0(T_1 - T_2) + K_2 + Q_{DA}\end{aligned}$$

ここで，D から A への変化は定圧変化だから，

$$\begin{aligned}Q_{DA} &= C_{\mathrm{v}}(T_0 - T_2) + p_0(V_0 - V_D)\\ &= C_{\mathrm{v}}(T_0 - T_2) + p_0V_0 - p_0V_D\\ &= C_{\mathrm{v}}(T_0 - T_2) + RT_0 - RT_2\\ &= (C_{\mathrm{v}} + R)(T_0 - T_2)\end{aligned}$$

よって，$Q = -C_0(T_1 - T_2) + K_2 + (C_{\mathrm{v}} + R)(T_0 - T_2)$

また，(1)より，$-W_{AB} = C_{\mathrm{v}}(T_B - T_0)$

ゆえに，$\dfrac{Q}{-W_{AB}} = \dfrac{-C_0(T_1 - T_2) + K_2 + (C_{\mathrm{v}} + R)(T_0 - T_2)}{C_{\mathrm{v}}(T_B - T_0)}$